



TITLE:

# Spatiotemporal Chaosの特徴づけ をめぐって(カオスとその周辺,研究会報告)

AUTHOR(S):

金子, 邦彦

---

CITATION:

金子, 邦彦. Spatiotemporal Chaosの特徴づけをめぐって(カオスとその  
周辺,研究会報告). 物性研究 1987, 48(4): 300-308

ISSUE DATE:

1987-07-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/92631>

RIGHT:

を提供することを意味している。

## 文献

G. J. Chaitin: Algorithmic information theory. IBM J. Res. Develop. 21 (1977) 350–359.

A. N. Kolmogorov: Logical basis for information theory and probability theory, IEEE Trans. Inform. Theory IT-14 (1968) 662–664.

釜江哲朗：確率と論理にもとづくランダムネスの表現．数理科学 267 — 9 (1985) 12–16．

# Spatiotemporal Chaos の特徴づけをめぐって

東大・教養 金子 邦彦

## § 1. 序

近年の chaos の研究は，自然現象の示す複雑さの解析への第一歩といえる。しかし，自由度の大きい系では，それに固有な複雑さの起源があると思われる。むろん，伝統的な統計力学は大自由度系を扱う有力な手法であろうが，乱流をはじめとした多くの系では，そういった方法では扱えない現象が多くあると思われる。ここでは，そのような複雑さを示す簡単なモデルを呈示し，それを定性・定量的に調べることにより，Spatiotemporal Chaos 研究への道を拓くことを目指す。

## § 2. モデル

状態，時間，空間を離散ないし連続にするかで<sup>3</sup>通りの力学系が考えられるが，ここでは，状態のみ連続，時空間は離散のモデルとして coupled map lattice (CML) を用いる<sup>1)</sup>。利点としては，力学系研究の成果に立脚し，乱流現象を捉えられるということ，数値計算の容易さにより，普遍的現象の予測をし易いということなど。

モデルとしては local dynamics と，空間的 coupling 項から発展する系であれば何でもよいが，ここでは主に

$$(I) \quad x_{n+1}(i) = (1 - \varepsilon) f(x_n(i)) + \frac{\varepsilon}{2} \{f(x_n(i+1)) + f(x_n(i-1))\}$$

を調べる。 $f(X)$  は local dynamics で，以下では logistic map :  $\lambda x(1-x)$  ないし，circle map :  $x + a \sin 2\pi x + c \pmod{1}$ 。  $n$  が時間，  $i$  が 1 次元格子。

## § 3. 現象学

主な現象を列挙する。(a)～(d)が logistic, (e)が circle map。

(a) Period-doubling of kink-antikinks<sup>1,2)</sup>

詳細は論文に譲るが、倍周期化により出来る空間構造にも自己相似性が成り立つことに注意 (図 1)。

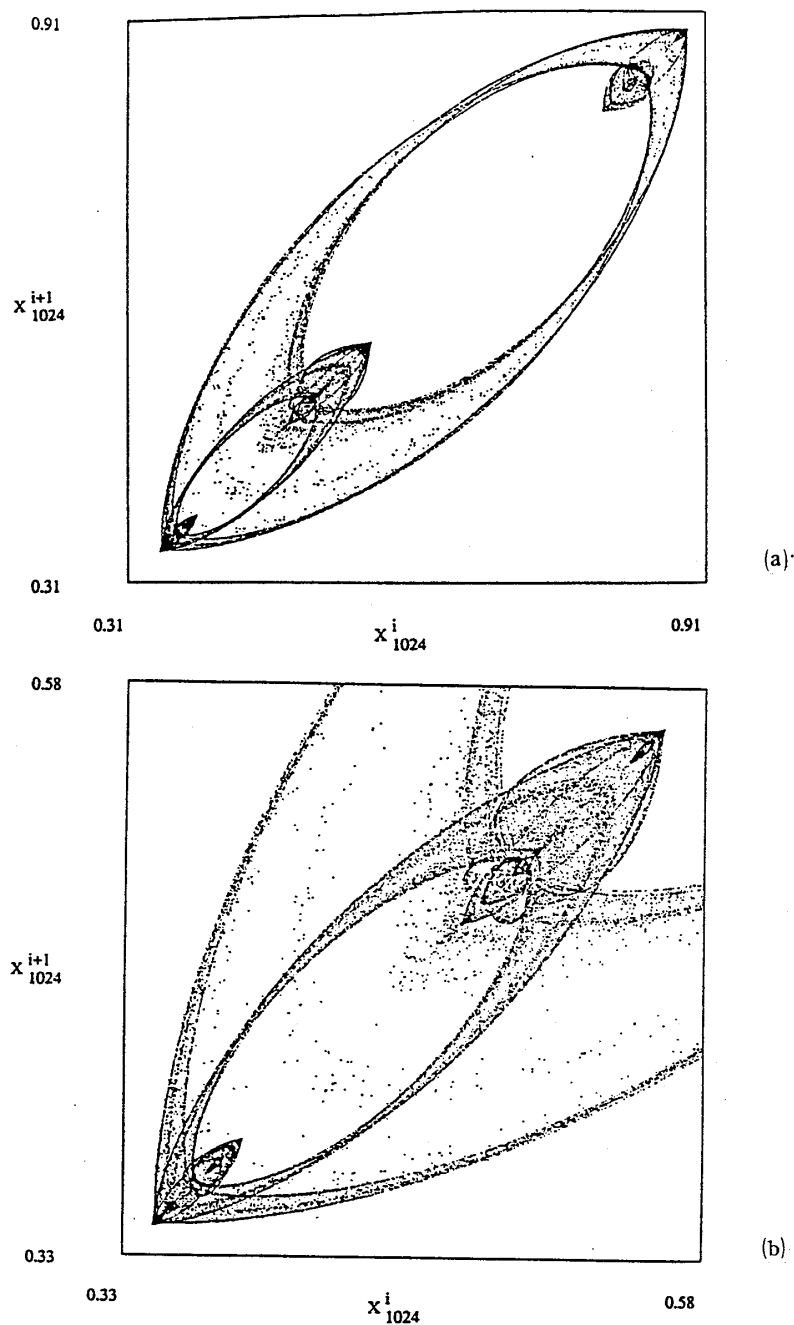


図 1 : Spatial Return Map : Coupled logistic lattice  
 $x_n(i)$  vs.  $x_n(i+1)$ . スナップ・ショット。サイズ = 65536.  
 b) : a) の一部分の拡大。  $\lambda = 3.56995$ ,  $\varepsilon = 0.6$

(b) Spatial Bifurcation<sup>2,3)</sup>

弱非線型領域では、空間的分化が起り、およそ周期 2, およそ 4, ..., chaos といったドメインに分離する (図 2)。このことは、(1) kink が不安定周期解を結ぶサドルである (2) システム・サイズによる分岐現象 (図 3) で説明される。

(c) パタンの選択とパタン競合間欠性<sup>4,5)</sup>

更に非線型性を増すと、図 2 のドメインが動き出せるようになり、結果として、適当なサイズのドメインを選び、安定な空間的・時間的周期構造が実現する (拡散による chaos の抑圧)。ここで、選択されるドメインが 1 つでない場合には、そのパタン間に競合が起り、これが間欠的バーストを生じる (図 4)。この間欠性は、Pomeau-

Manneville 型と違って **robust** であるのが特徴。空間的フーリエ変換により、 $k$ -space で見ると、 $k = k_1$  と  $k_2$  でのピーク、間欠性によるブロード・バンド、更に発達乱流への遷移がよく見られる (図 5)。

この詳細な機構は現在解明中であるが、注目すべきは、 $k = k_1$  や  $k_2$  のフーリエ・モードの時間発展に対してのみ、 $f^{-\alpha}$ -型のパワー・スペクトルが出現すること。

(d) Chaotic Diffusion of Turbulon<sup>5)</sup>

パタン選択の特殊な場合として、 $k = 1/2$  つまり zig-zag 構造が選ばれる場合を考える。この時、zig-zag の位相の異なる 2 種のドメインが存在しうが、非線型性を増すにつれ

- (1) ドメインは静止 (凍結パタン)
- (2) ドメインの境界が“粒子”的にブラウン運動をする。この時、zig-zag のパタンは準周期的で、chaotic な振舞は、粒子の位置にのみ局在 (“Turbulon”) (図 6)。
- (3) Turbulon, zig-zag パタンともに chaotic に変化。しかし、この 2 種の chaos は質を異にする。ここでも Turbulon はブラウン運動。しかし注目すべきは (2) → (3) の転移で、Turbulon の拡散係数が約  $10^2$  倍増大すること。

の変化が起る。(2) では Turbulon は自分自身の chaos により拡散、(3) はパタンの方の chaos

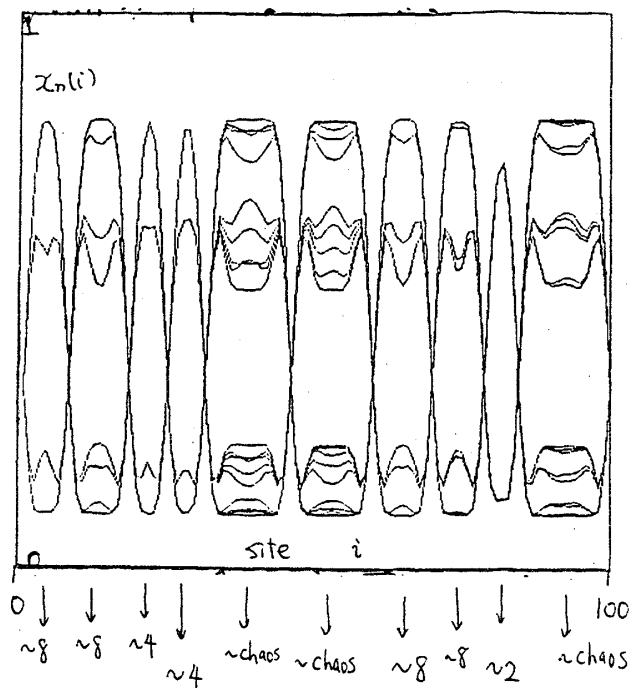


図 2 : coupled logistic lattice,  $x_n(i)$  の重ね書き。transien が減衰したあと 20 ステップをプロット。

サイトによりおよそその周期が変化している  
 $\lambda = 1 + \sqrt{7.68}$ ,  $\epsilon = 2/3$ 。

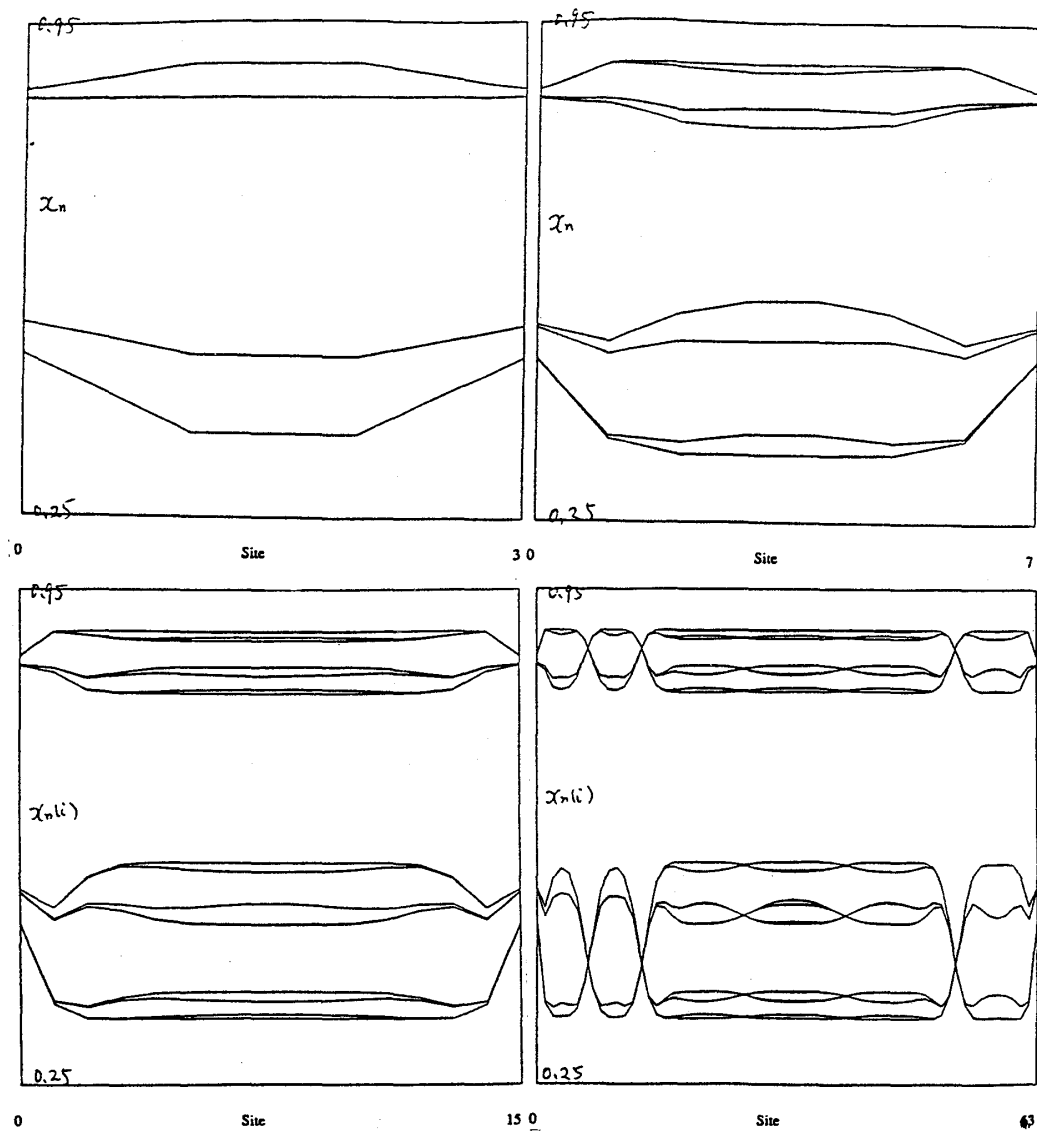


図3：システム・サイズによる分岐現象（logistic）

$x_n(i)$  vs  $i$ . transient が消えたあとの 32 ステップの重ね書き。  $\lambda = 3.57$ ,

$\varepsilon = 0.4$  (a) 4 周期 (b) 8 周期 (c) 16 周期 (d) カオス

システム・サイズは (a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 64.

境界条件：両端で不安定固定点に固定。

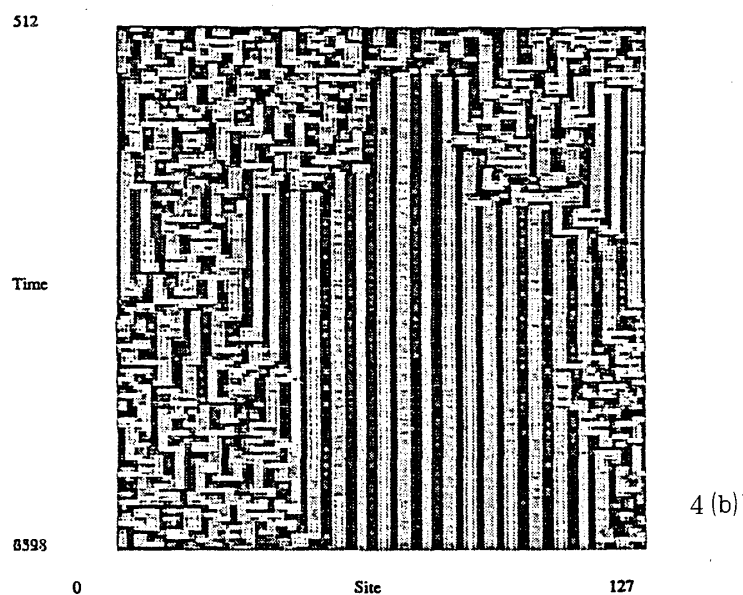
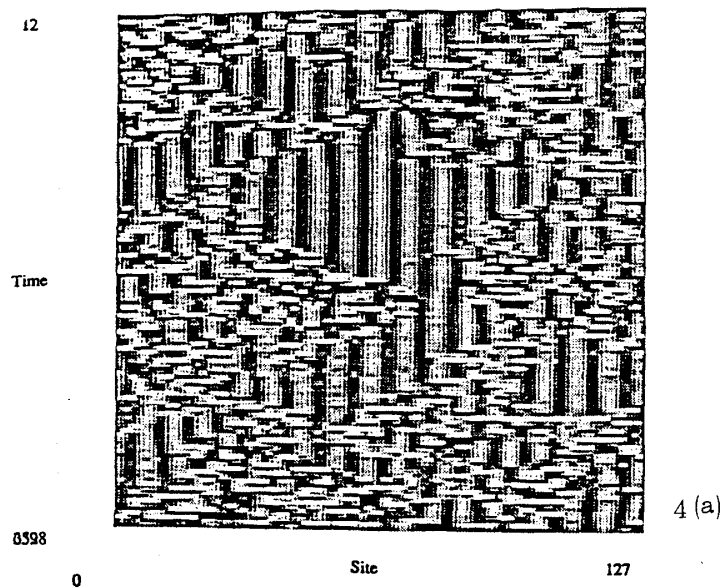


図 4：濃淡コード化による時空パターン

16 ステップごとに  $x_n(i)$  を 0.2 から 0.9 の間で 5 段階濃淡コード化。logistic。

(a)  $\lambda = 3.83$ ,  $\varepsilon = 0.5$  (b)  $\lambda = 3.82$ ,  $\varepsilon = 0.3$

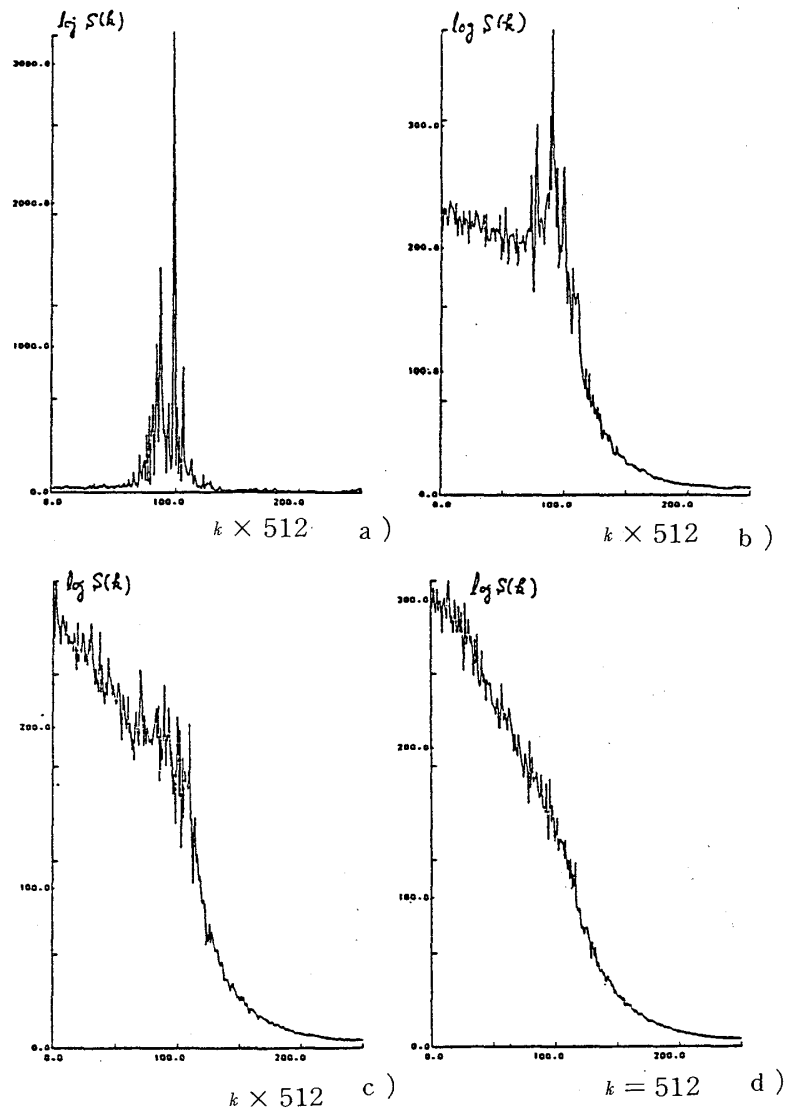


図5：空間的フーリエ変換  $S(k)$ ， logistic lattice  
 サイズ=1024。transiet が消えたあとの2000ステップの平均。

$$S(k) = \sum_n \left| \sum_{i=1}^N x_n(i) e^{ik i} \right|^2, \quad \varepsilon = 0.3, \text{ サイズ} = 1024$$

$$(a) \quad \lambda = 1 + \sqrt{8} \quad (b) \quad \lambda = 1 + \sqrt{8.2} \quad (c) \quad \lambda = 1 + \sqrt{8.4}$$

$$\lambda = 1 + \sqrt{8.6}$$

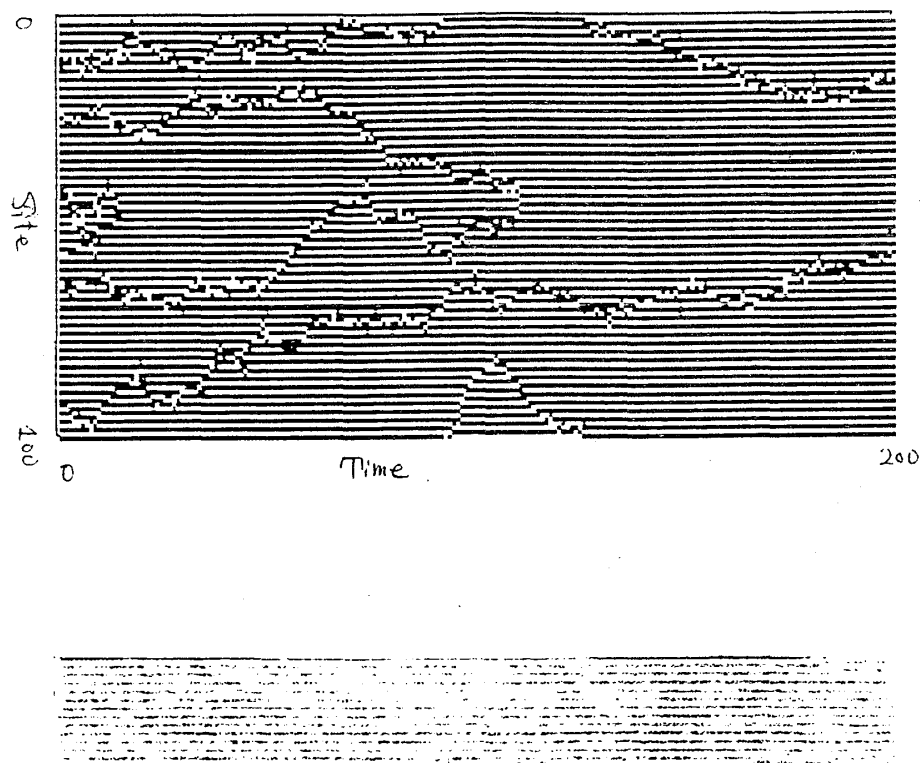


図6：時空パターン。  $\lambda = 1 + \sqrt{7.4}$ ,  $\varepsilon = 0.1$ 。logistic。  
 $x_n(i) > 0.25$ を黒,  $x_n(i) < 0.25$ を白でプロット。

も働くため、拡散係数の大変化が生じるものと思われる。

#### (e) ソリトン乱流<sup>2,4)</sup>

coupled circle lattice は、空間的 Josephson 結合 + 外力の系に類似するが、この系で非線型性を増すと、

一様 (kink-antikink の対消滅) → ソリトン乱流 (kink, antikink の chaotic な生成消滅) → 発達乱流の遷移が生じる (図7)。

この他、セル・オートマタに類似する過渡的空間 chaos<sup>2)</sup>, 流れのある系での下流への倍周期化<sup>1)</sup>, 間欠性, Pomeau-Mannville 型空間的間欠性<sup>1)</sup>等の現象も見出されている。

### § 4. 定量化へ向けて

紙数が既にオーバーしたので略記すると, (1) リアプノフ解析<sup>3)</sup> (2) 流れつきリアプノフ数<sup>3)</sup> (3) 次元の概念の拡張<sup>6)</sup> (4) 情報の流れ (5) 時空エントロピー密度とその流れ<sup>7)</sup> (6) パタンの分布, パタン間の遷移行列<sup>5)</sup> (7) 粗視化によるスケーリング解析<sup>5)</sup>等がおこなわれ, Spatio-temporal Chaos の定量的特徴づけへと向っている。



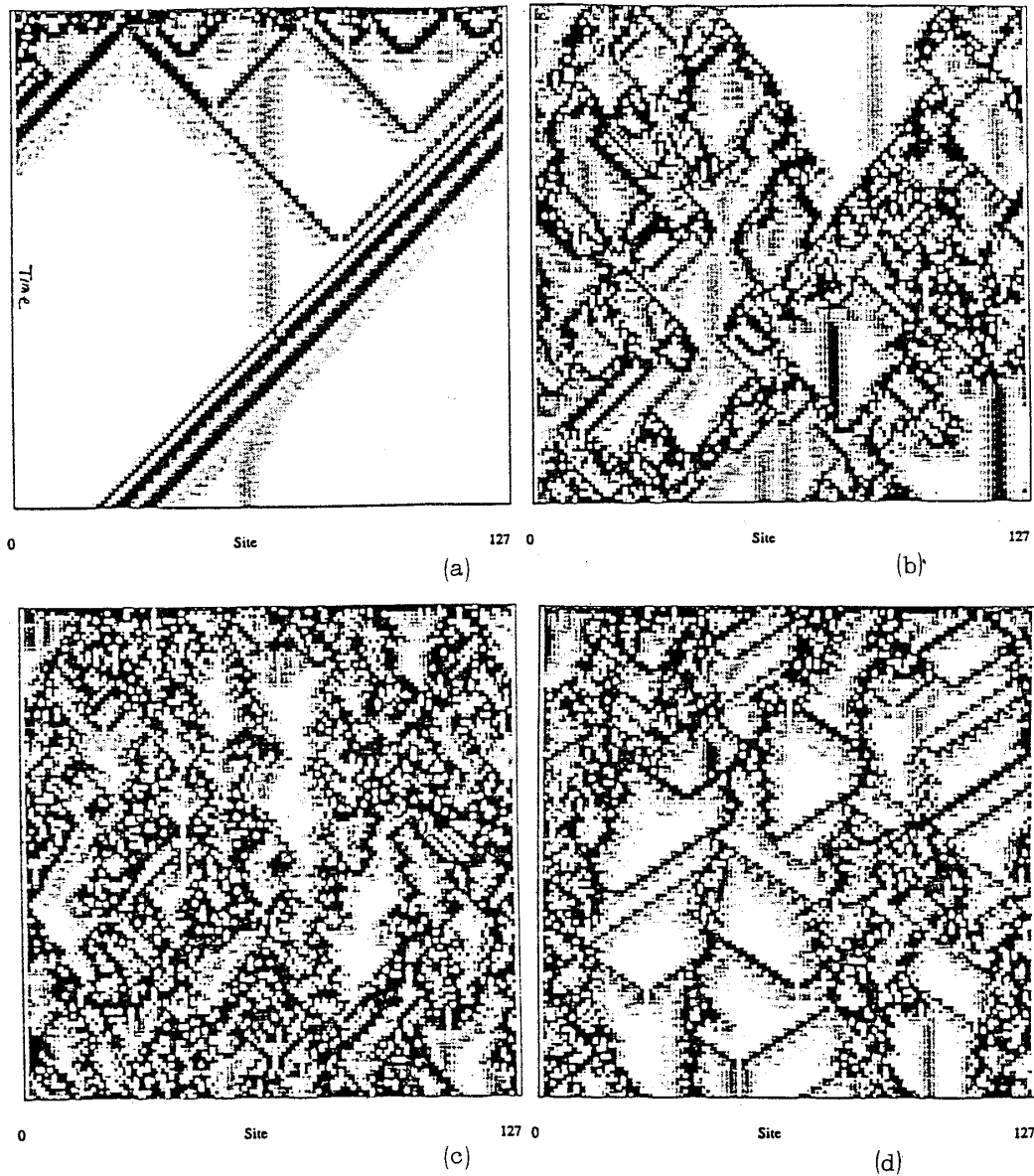


図7 : Coupled Circle Lattice, Spatial Derivative  $|x_n(i) - x_n(i+1)|$  を  $(0, 0.04)$  で 16 段階濃淡コード化。4 ステップごとにプロット。  
 $\epsilon = 0.2$ ,  $c = 0.3$  (a)  $a = 0.2$  (b)  $a = 0.203$  (504 ステップから  $504 + 128 \times 4$  ステップまで) (c)  $a = 0.205$  (d)  $a = 0.207$

## 参考文献

- 1) K. Kaneko: *Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems* 第7章 (World Sci. Pub., 1986) 及びその章の参考文献
- 2) J. Crutchfield and K. Kaneko: "Phenomenology of Spatiotemporal Chaos" (preprint, 1987)
- 3) K. Kaneko: *Physica* **23D** (1986) 436
- 4) K. Kaneko: "Phenomenology and Characterization of Spatiotemporal Chaos" in *Dynamical Systems and Singular Phenomena* (World Sci. Pub., 1987)
- 5) K. Kaneko: in preparation

- 6) T. Kurtz, G. Mayer-Kress and K. Kaneko: in preparation
- 7) J. Crutchfield and K. Kaneko: in preparation

## 高次元アトラクタを特徴づける試み (コメント)

京大・基研 池田 研介

北大・薬 松本 健司

Kuramoto-Sivashinsky モデル (以下 KS モデル) 及びその modified version を試材として、アトラクターの位相空間内での諸性質と波数空間で観測される intermittency の間に成立つ関係を調べている。その中間報告を行いたい。

前回の講演でのべたように、遅延微分モデル (以下 DD モデル) の高次元アトラクターは、次の諸性質をもっている。

- (1) リアプノフスペクトルにおけるリアプノフ数の順序を  $i$  とする。  $i \geq I_{LE}$  なる  $i$  に対して、リアプノフスペクトルと linear fluctuation mode スペクトルが完全に一致するような  $I_{LE}$  が存在する。
  - (2) リアプノフ成分はリアプノフ数の対数に比例する。換言すれば log scale でみたアトラクターの概形は局所的なリアプノフ楕円の相似である。
- (1)(2)の性質から、次の性質が導かれる：
- (3) リアプノフベクトル  $(\vec{e}_n, \vec{e}_{n+1}, \dots)$  ( $\vec{e}_n$  は  $n$  番目リアプノフ数に対応) で張られた外部分空間  $EX_n^L$  への状態ベクトル  $\vec{R}$  への射影  $\vec{R}_n$  の統計的性質は  $n \geq I_{LE}$  で特徴的变化を示す。即ちベクトル間の相関が急激に増大する。
  - (4) (リアプノフ=フーリエ対応) リアプノフベクトルの順番を  $i$ 、フーリエモードの波数とすると、 $i$  と  $k$  の間にはある mapping  $k = f(i)$  が存在する。 $i$  が増大すると  $k$  も増大する。

従って(3)の性質は(4)を通して、波数空間での物理現象に反映される：

- (5) (Intermittency) 波数空間でのバンド (ハイ) パスフィルターを通した時空パターンには次の性質がある：ある特徴的波数  $k_d$  が存在して  $k > k_d$  ではバンドパスパターンが間欠的バーストにみえ、間欠性の度合は  $k$  に比例する。この領域では異った  $k$  でみられるバースト間に強い相関が存在する。 $k_d = f(I_{LE})$  である。

まづ KS モデルでも上記諸性質が満たされているか否かがテストされた。